УДК 519.53 + 517.987

ПОЛНОТА ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНОСТИ ВЕКТОРНЫХ МЕР

В.А. Романов

Доведено, що для векторноЇ міри простори напрямів варіаційноЇ, напівваріаційноЇ та поточковоЇ неперервності є повними відносно деяких метрик, які породжуються мірою.

It is proved that for a vector measure the spaces of its directions of variational, semivariational and pointness continuity are complete with respect to some metrics that generated by the measure .

1. Введение. В публикации [1] исследовано понятие направления непрерывности скалярной меры, в [2] – [5] получены его применения к пределам мер и линейных операторов. В связи с развитием теории векторных мер и их пределов [6] – [8] представляет интерес исследование соответствующих пространств непрерывности.

2. Постановка задачи. Пусть X - сепарабельное гильбертово пространство, d - метрика, порождающая его топологию. Под векторной мерой в пространстве X понимаем сигма-аддитивную функцию множества конечной полной вариации, которая определена на борелевских подмножествах пространства X и принимает значения в некотором банаховом пространстве.

Определение 1. *Сдвигом* векторной меры Ф на вектор x пространства X называется векторная мера Ф [x], значение которой на каждом борелевском множестве B задается формулой

$$\Phi\,[x]\,(B) = \Phi\,(B + x).$$

Определение 2. Векторная мера Ф называется *поточечно непрерывной* по направлению x, если при сдвиге меры на вектор cx и стремлении коэффициента c к нулю ее приращение имеет нулевой предел в смысле сходимости на системе измеримых множеств. Если же указанное приращение имеет нулевой предел в смысле полувариационной или вариационной сходимости, то мера называется *полувариационно* и соответственно *вариационно непрерывной.*

Обозначим подпространства пространства X всех направлений вариационной, полувариационной и поточечной непрерывности данной векторной меры Ф соответственно X (1), X (2) и X (3).

На первом из этих подпространств зададим метрику d (1) формулой

$$d\,(1)\,(x, y) = d\,(x, y) + \sup \mathrm{Var}\,(\Phi\,[cy] - \Phi\,[cx]),$$

где верхняя грань берётся по всем скалярам c из отрезка [- 1; 1], а Var означает полную вариацию.

На втором из указанных подпространств зададим метрику d (2) формулой

$$d\,(2)\,(x, y) = d\,(x,y) + \sup \mathrm{Semivar}\,(\Phi\,[cy] - \Phi\,[cx]),$$

где Semivar означает полную полувариацию.

На третьем из рассматриваемых подпространств зададим метрику d (3) формулой

$$d\,(3)\,(x, y) = d\,(x, y) + \sup\,(v\,(\Phi)\,[cy] - v\,(\Phi)\,[cx]),$$

где v (Ф) означает вариацию векторной меры Ф.

Цель статьи состоит в доказательстве полноты указанных подпространств при наделении их указанными метриками.

3. Результаты работы.

Теорема 1. Пусть Ф - векторная мера в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве X. Тогда подпространство X (1) всех её направлений вариационной непрерывности полно относительно метрики d (1).

Доказательство. Пусть x (n) - фундаментальная относительно метрики d (1) последовательность векторов подпространства X (1). Поскольку исходная метрика d пространства X мажорируется метрикой d (1), то эта последовательность фундаментальна и относительно метрики d, а потому сходится относительно неё к некоторому вектору x.

Пусть У (к) - линейная оболочка первых к векторов ортонормированного базиса пространства X, P (к) - оператор ортогонального проектирования, действующий из X на У (к), P (к) Ф - соответствующая конечномерная проекция Ф, значение которой на каждом борелевском множестве из У (к) равно значению самой Ф на прообразе (относительно указанного ортопроектора) упомянутого множества.

Поскольку полная вариация векторной меры определяется как верхняя грань по всем системам из конечного числа непересекающихся борелевских множеств сумм норм её значений на этих множествах и поскольку борелевские множества можно аппроксимировать цилиндрическими, то упомянутая полная вариация векторной меры совпадает с верхней гранью полных вариаций её конечномерных проекций.

Учитывая сказанное, а также принимая во внимание способ задания метрики

d (1), получаем, что для расстояния между элементами нашей последовательности справедлива формула

$$d (1) (x (n), x (m)) = d (x (n), x (m)) + \sup Var ((P (k) \Phi) [c P (k) (x (n)] - (P (k) \Phi) [c P (k) (x (m))]),$$

где верхняя грань берётся по всем числам c из отрезка [-1; 1] и по всем натуральным числам к.

Из фундаментальности нашей последовательности вытекает, что для произвольного положительного е упомянутое расстояние становится меньшим е для достаточно больших номеров n, m.

Следовательно, для таких номеров n, m, для каждого числа c из отрезка [- 1; 1] и каждого натурального к станет меньшей е и величина

$$d (x (n), x (m)) + Var ((P(k) \Phi) [c P (k) (x (n)] - (P (k) \Phi) [c P (k) x (m)]).$$

Зафиксируем номер n, а номер m устремим к бесконечности. Тогда последовательность векторов P (k) (x (m)) сходится к вектору P (к) (x). Поскольку конечномерная проекция P (к) Ф непрерывна по направлениям упомянутых векторов, то можно перейти к пределу под знаком полной вариации. Переходя затем к верхней грани по всем числам c из отрезка [-1; 1] и по всем натуральным числам к, получаем, что для достаточно больших номеров n величина

$$d (1) (x (n), x)$$

не превзойдёт числа е.

Следовательно, последовательность x (n) сходится к вектору x не только относительно метрики d, но и относительно метрики d (1).

Кроме того, величина Var (Ф [c x] - Ф) не превосходит суммы величин Var (Ф [c x] - Ф [c x (n)]) и Var (Ф [c x (n) - Ф), а потому (с учётом принадлежности вектора x (n) подпространству X (1)) имеет нулевой предел при стремлении коэффициента c к нулю. Следовательно, вектор x также принадлежит подпространству X (1), чем и завершается доказательство.

Теорема 2. Пусть Ф - векторная мера в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве X. Тогда подпространство X (2) всех её направлений полувариационной непрерывности полно относительно метрики d (2).

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Теорема 3. Пусть Ф - векторная мера в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве Х. Тогда подпространство Х (З) всех её направлений поточечной непрерывности полно относительно метрики d (З).

Доказательство. Поскольку поточечная непрерывность по данному направлению векторной меры Ф равносильна непрерывности по этому же направлению её вариации v (Ф) и поскольку для скалярной меры, которой является v (Ф), поточечная и вариационная непрерывности эквивалентны, то подпространство Х (З) можно считать подпространством всех направлений вариационной непрерывности скалярной меры v (Ф). Далее заметим, что метрика d (З) как раз и отвечает построению метрики d (1), используемой в теореме 1, с помощью вариации v (Ф), а не самой векторной меры Ф, Поэтому остаётся применить теорему 1 к скалярной мере v (Ф), чем и завершается доказательство.

Замечание 1. Построенные метрики порождают в соответствующих подпространствах новые топологии, причём более сильные по сравнению с исходной.

Пример 1. Для центрированной гауссовской меры в сепарабельном гильбертовом пространстве, корреляционный оператор которой совпадает с квадратом оператора Гильберта-Шмидта А, подпространства её направлений непрерывности совпадают с образом оператора А.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Романов В.А. О непрерывных и вполне разрывных мерах в линейных пространствах // Докл. АН СССР. – 1976. – 227, № 3. – С. 569-570.
2. Романов В.А. Пределы квазиинвариантных мер в гильбертовом пространстве // Укр. Матем. Журн. – 1979. – 31, № 2. – С. 211-214.
3. Романов В.А. Пределы дифференцируемых мер в гильбертовом пространстве // Там же. – 1981. – 33, № 2. – С. 215-219.
4. Романов В.А. Предельные переходы с мерами в гильбертовом пространстве относительно различных видов сходимости // Там же. – 1984. – 36, № 1. – С. 69-73.
5. Романов В.А. Интегральные операторы, порождаемые Н-непрерывными мерами // Там же. – 1989. – 41, № 6. – С. 769-773.
6. Романов В.А. Пределы аналитических векторных мер // Там же. – 1992. – 44, № 8. – С. 1133-1135.
7. Романов В.А. Векторные меры различных классов гладкости и их пределы // Там же. – 1995. – 47 , № 4. - С. 512-516.
8. Романов В.А. Слабые базисы векторных мер // Там же. – 2007. – 59, № 10. – С. 1437-1441.